UNIVERSIDAD TECNOLÓGICA NACIONAL

Facultad Regional San Nicolás

Ecuaciones Diferenciales y Complementos de Análisis

Licenciatura en Enseñanza de la Matemática

Mg. Lucía C. Sacco

Año 2011

CONTENIDOS y BIBLIOGRAFÍA

Ecuaciones Diferenciales:

- EDWARDS, J. – PENNEY, D. (1993): "Ecuaciones Diferenciales Elementales y problemas con Condiciones en la Frontera"
- STEWART, J. (1998): "CÁLCULO – Conceptos y contextos"
- ZILL, D. (1997): "Ecuaciones diferenciales con aplicaciones de modelado"

Derivadas e Integrales:

- STEWART, J. (1999): "Cálculo multivariable".

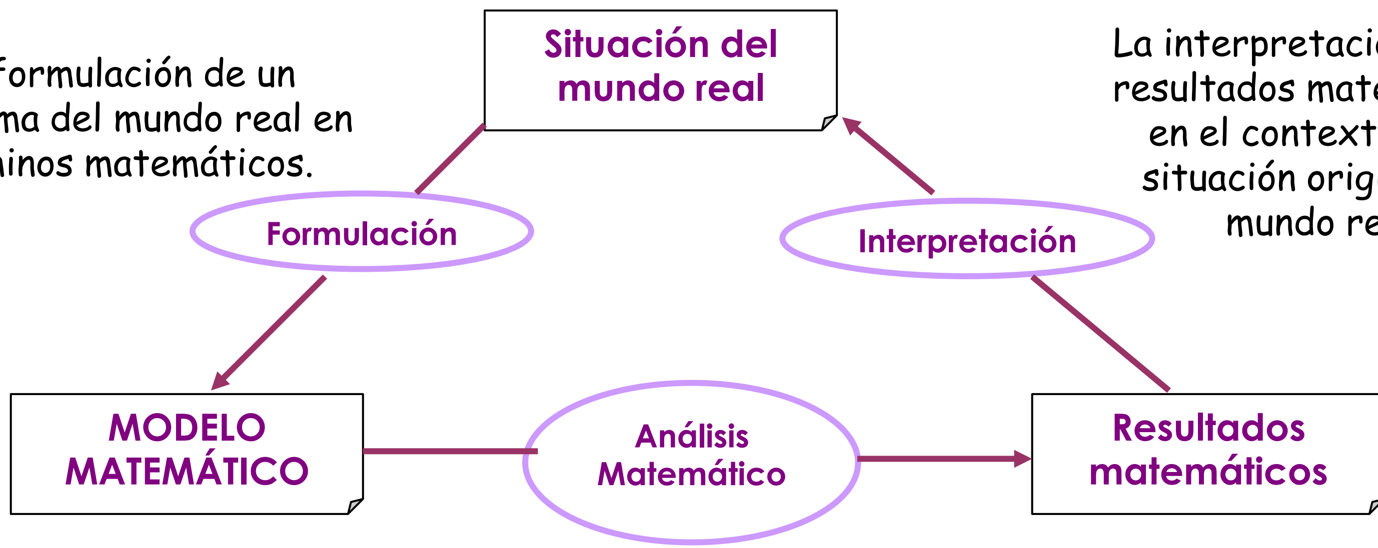
Sucesiones y Series:

- CHURCHIL, R. (1969): "Teoría de Funciones de variable compleja"

PROCESO DE FORMULACIÓN DE MODELOS MATEMÁTICOS

La formulación de un problema del mundo real en términos matemáticos.

La interpretación de los resultados matemáticos en el contexto de la situación original del mundo real



El análisis o solución del problema matemático resultante

Licenciatura en Enseñanza de la Matemática

Facultad Regional San Nicolás

Ecuaciones diferenciales de primer orden
Ecuaciones lineales de orden superior

Métodos de resolución analíticos

Licenciatura en Enseñanza de la Matemática

Facultad Regional San Nicolás

MODELOS DE CRECIMIENTO DE POBLACIONES

Es posible encontrar diversos MODELOS para predecir la población del mundo en el futuro:

- Si consideramos que la población crece con una rapidez proporcional a su tamaño

Para formular este MODELO utilizamos el

ANÁLISIS MATEMÁTICO

- ✓ Problemas que implican la rapidez con que cambia una magnitud con respecto a otra

El MODELO MATEMÁTICO

a menudo toma la forma de una

$$\frac{dP}{dt} = k\,P$$

ECUACIÓN DIFERENCIAL

Es una ecuación que contiene las derivadas de una o más variables dependientes con respecto a una o más variables independientes.

CLASIFICACIÓN SOLUCIÓN

Las ecuaciones diferenciales se clasifican de acuerdo a:

a) EL TIPO:

- Ecuación Diferencial Ordinaria

$$\frac{dy}{dx} + 10y = e^{y}$$ Función $y = y(x)$

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \frac{dy}{dx} + 6y = 0$$ Función $y = y(x)$

- Ecuación en Derivadas Parciales

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 u}{dt^2} - 2\frac{\partial u}{\partial t}$$ Función $u = u(x,t)$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{dx}$$ Funciones $u = u(x,y)$ y $v = v(x,y)$

b) EL ORDEN: (tanto para ED ordinarias o en derivadas parciales)

- EDO de segundo orden: $$\frac{d^2y}{dx^2} + 5.(\frac{dy}{dx})^3 - 4y = e^x$$
- EDO de primer orden: $$(y-x)dx + 4x\,dy = 0$$

Situación del mundo real: Suponiendo que se perfora un hoyo en la Tierra a lo largo de su diámetro, demostrar que si una partícula con masa "m", que está en la superficie de la Tierra, se arroja desde su posición de reposo al hoyo, entonces la distancia y=y(t) de la partícula con respecto al centro de la Tierra en el tiempo "t", está dada por:

$$y''(t) = -k^2\, y(t)$$

donde $k^2 = {GM}/{R^2}$ con "G" constante gravitacional, "M" masa de la Tierra y "R" radio de la Tierra.

c) LA LINEALIDAD:

Una ecuación diferencial

$$y^n = f(x, y, y', y'', \ldots\ldots, y^{n-1})$$

es LINEAL cuando *f* es una función lineal de

$y, y´, \ldots, y^{n-1}$.

EDO lineales	EDO no lineales
$(y-x)dx + 4x\,dy = 0$	$(1+y).y' + 2y = e^x$
$y'' + 2y' + y = 0$	$y'' + sen\,y = 0$

SOLUCIÓN DE UNA ECUACIÓN DIFERENCIAL

Una función Φ

definida en un intervalo I,

es SOLUCIÓN de una ecuación diferencial en dicho intervalo, cuando sustituida en la ecuación diferencial la transforma en una identidad.

En símbolos:

Φ es solución de una EDO

$$\Leftrightarrow \quad F(x,\phi(x),\phi'(x),\ldots,\phi^{n}(x))=0 \qquad \forall x \in I$$

Tipos de soluciones

- Solución explícita
- Solución trivial
- Solución implícita

Otras terminologías

- ✓ Integral
- ✓ Curva integral o curva de solución
- ✓ Familia monoparamétrica de soluciones
- ✓ Solución particular
- ✓ Solución singular
- ✓ Solución general

Solución general de una EDO con MAPLE

Solución general de una ecuación diferencial

```
>
with(DEtools):
ecuac := D(y)(x) +x*y(x) = x;

solucion_general:=dsolve( ecuac , y(x) );
```

$$ecuac := \mathrm{D}(y)(x) + x\,\mathrm{y}(x) = x$$

$$solucion\_general := \mathrm{y}(x) = 1 + \mathbf{e}^{(-1/2\,x^2)}\,\_C1$$

```
>
> diff(y(x),x$2)+3*diff(y(x),x)=4*y(x);
solucion_general:=dsolve(diff(y(x),x$2)+3*diff(y(x),x)=4*y(x),y(x)
);
```

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\mathrm{y}(x)\right) + 3\left(\frac{\partial}{\partial x}\mathrm{y}(x)\right) = 4\,\mathrm{y}(x)$$

$$solucion\_general := \mathrm{y}(x) = \_C1\,\mathbf{e}^{x} + \_C2\,\mathbf{e}^{(-4\,x)}$$

```
>
```

PROBLEMA DE VALOR INICIAL

- Problema de valor inicial de 1er orden:

$$RESOLVER: \quad \frac{dy}{dx} = f(x, y)$$

$$SUJETA\ a: \quad y(x_0) = y_0$$

- Problema de valor inicial de 2do orden:

$$RESOLVER: \quad \frac{d^2 y}{dx^2} = f(x, y, y')$$

$$SUJETA\ a: \quad y(x_0) = y_0 \qquad y'(x_0) = y_0$$

Interpretación geométrica

Problema de valor inicial de segundo orden

```
> ecuac2:=diff(y(x),x$2)+16*y(x)=0;
```

$$ecuac2 := \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x)\right) + 16\, y(x) = 0$$

```
> solucion_general:=dsolve(ecuac2,y(x));
```

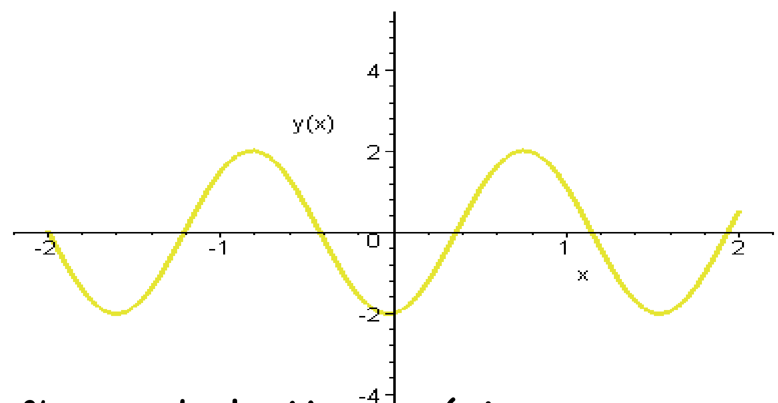
$$solucion\_general := y(x) = \_C1 \sin(4\,x) + \_C2 \cos(4\,x)$$

```
> con_ini:=y(Pi/2)=-2,D(y)(Pi/2)=1:
solucionp:=dsolve( {ecuac2, con_ini} , {y(x)} );
```

$$solucionp := y(x) = \frac{1}{4}\sin(4\,x) - 2\cos(4\,x)$$

```
> DEplot(diff(y(x),x$2)+16*y(x)=0,y(x),
x=-2..2,[[y(Pi/2)=-2,D(y)(Pi/2)=1]],y=-4..5,stepsize=.05);
```

Representación gráfica de la **solución particular** del problema de valor inicial



CAMPO DE DIRECCIONES

Problema de valor inicial de primer orden

```
> with(DEtools):
> ecuac:=D(y)(x)=y(x):
> solucion_general:=dsolve(ecuac,y(x));
```

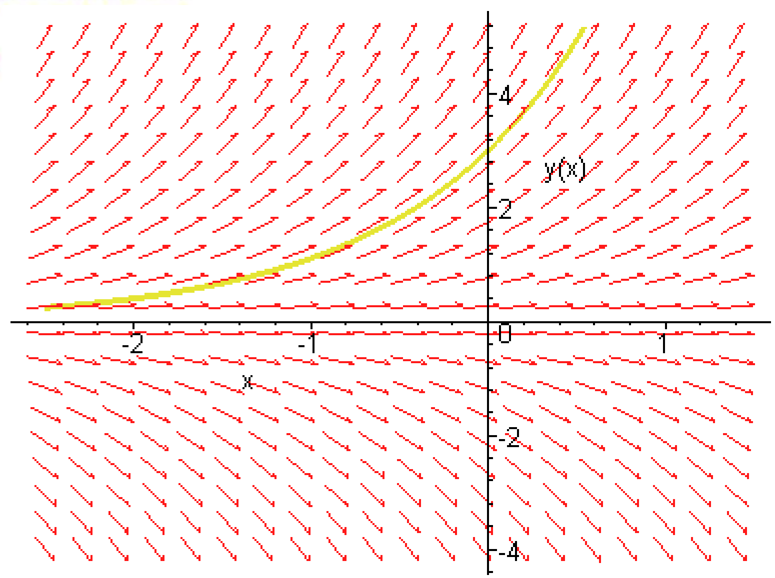
$$solucion\_general := y(x) = \_C1\, e^x$$

```
> con_ini:=y(0)=3:
  solucionp:=dsolve( {ecuac, con_ini} , {y(x)} );
```

$$solucionp := y(x) = 3\, e^x$$

```
> DEplot(D(y)(x)=y(x),y(x),
  x=-2.5..1.4,[[y(0)=3]],y=-4..5,stepsize=.05);
```

Representación gráfica de la **solución particular** del problema de valor inicial



EXISTENCIA Y UNICIDAD

Al resolver un problema de valor inicial surgen dos asuntos fundamentales:

¿Existe una solución al problema?
Si la hay, ¿es única?

Existencia	**Unicidad**
❑ ¿La ecuación diferencial $$\frac{dy}{dx} = f(x, y)$$ tiene soluciones? ❑ ¿Alguna de las curvas solución pasa por el punto (x_0, y_0) ?	❑ ¿Cuándo podemos estar seguros de que hay precisamente **UNA** curva solución que pasa por el punto (x_0, y_0)?

Licenciatura en Enseñanza de la Matemática
Facultad Regional San Nicolás

TEOREMA

Sea R una región rectangular del plano xy

$a \leq x \leq b$; $c \leq y \leq d$ que contiene al punto $(x_0 ; y_0)$.

Si $f(x;y)$ y $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ son continuas en R,

entonces existe un intervalo I, y una función única $y(x)$ definida en I,

que satisface el problema de valor inicial

$$y' = f(x, y)$$

$$y(x_0) = y_0$$

En MAPLE

Licenciatura en Enseñanza de la Matemática

Facultad Regional San Nicolás

ECUACIONES DIFERENCIALES
y
MODELOS MATEMÁTICOS

Problemática disparadora: CRECIMIENTO DEMOGRÁFICO

"La tasa de crecimiento de la población de un país crece en forma proporcional a la población total, P(t), de ese país en cualquier momento t"

MODELO MATEMÁTICO $\dfrac{dP}{dt} \alpha P \quad \Rightarrow \quad \dfrac{dP}{dt} = k.P$

Licenciatura en Enseñanza de la Matemática

Facultad Regional San Nicolás

La ecuación diferencial que permite modelizar la situación disparadora: $\Rightarrow$ $P' = k.P$

Obedece a la forma de las ECUACIONES DIFERENCIALES DE PRIMER ORDEN

$$\frac{dy}{dx} = g(x).h(y)$$

donde "x" es la variable independiente e "y" es la función incógnita.

Estas ecuaciones se denominan:

ECUACIÓN DIFERENCIAL SEPARABLE
ó
de VARIABLES SEPARABLES

MÉTODO DE RESOLUCIÓN

resolviendo por “cuadratura” es posible obtener

- SOLUCIÓN GENERAL:

$$P = C.e^{kt}$$

- PROBLEMA DE VALOR INICIAL:

$$P(0) = 2 \Rightarrow P(t) = 2.e^{kt}$$

CRECIMIENTO Y DECAIMIENTO EXPONENCIALES

- Suponiendo que se tiene una población de bacterias con tamaño P=1000 y que, en cierto momento, crece a razón de P'=300 bacterias por hora.

El modelo $$\frac{dP}{dt} = k\,P$$

¿Es una hipótesis razonable?

¿Cuál es el significado de la constante de proporcionalidad?

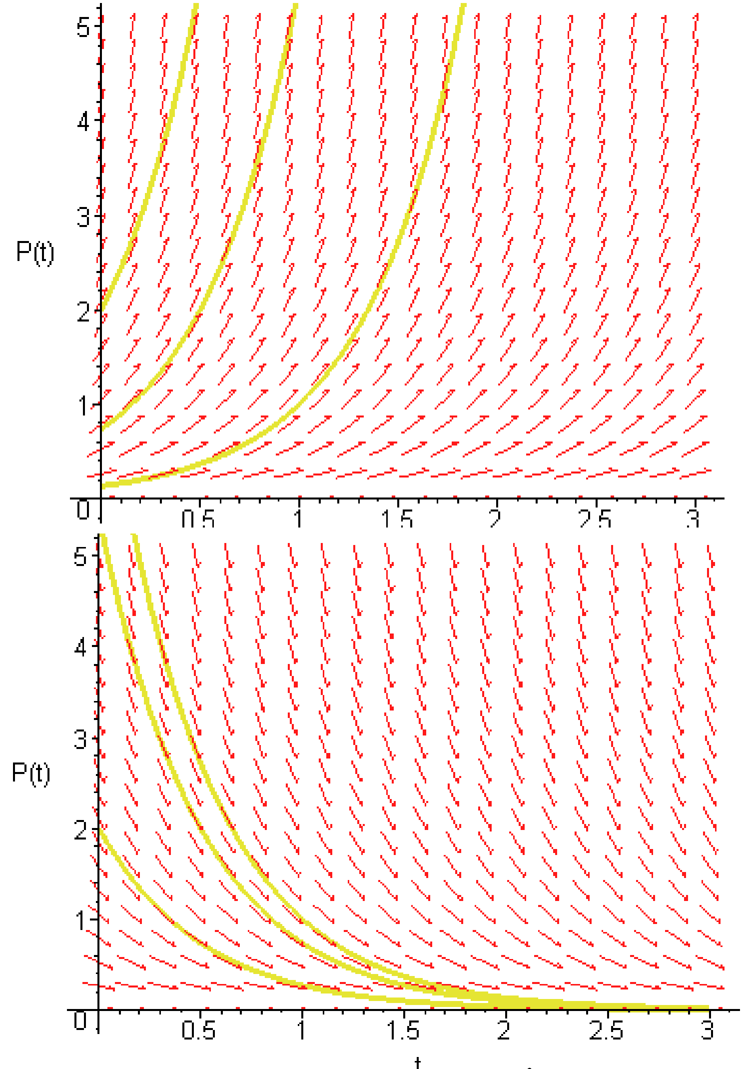
TASA RELATIVA "k"

- Si $k > 0$ y $t \geq 0$ la ecuación diferencial $\dfrac{dP}{dt} = k\,P$

  LEY del CRECIMIENTO NATURAL

- Si $k < 0$ y $t \geq 0$ la ecuación diferencial $\dfrac{dP}{dt} = k\,P$

  LEY del DECAIMIENTO NATURAL



En MAPLE

Si modificamos la situación inicial y se permite una inmigración r(t) en la problemática del CRECIMIENTO DEMOGRÁFICO:

La ecuación diferencial que permite modelizar la nueva situación:

$$\frac{dP}{dt} = k\,.P + r(t)$$

Obedece a la forma de las **ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES** DE PRIMER ORDEN

$$y' + p(x)\,y = q(x)$$

Método del factor integrante

Métodos de resolución

Método de variación del parámetro

Solución general $P(t) = -\frac{r(t)}{k} + C.e^{kt}$

Problema de valor inicial $P(t) = -\frac{r(t)}{k} + (2 + \frac{r(t)}{k}).e^{kt}$

Soluciones con Maple

```
> with(DEtools):
> ecuac:=D(P)(t)=k*P(t)+r(t);
```

$$ecuac := D(P)(t) = k\, P(t) + r(t)$$

```
> solucion_general:=dsolve(ecuac,P(t));
```

$$solucion\_general := P(t) = \left(\int r(t)\, e^{(-k\,t)}\, dt + \_C1\right) e^{(k\,t)}$$

```
> con_ini:=P(0)=2:
solucionp:=dsolve( {ecuac, con_ini} , {P(t)} );
```

$$solucionp := P(t) = \left(\int_0^t r(u)\, e^{(-k\,u)}\, du + 2\right) e^{(k\,t)}$$

En MAPLE

Otra situación interesante:

CURVAS DE APRENDIZAJE

La ecuación diferencial lineal de primer orden

es un modelo razonable para el aprendizaje

$$\frac{dP}{dt} = k\,(M - P)$$

donde P(t) es el rendimiento de alguien que aprende una habilidad como función del tiempo “t”

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES de orden superior

Se denomina ECUACIÓN DIFERENCIAL de orden n a una ecuación del tipo:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots + a_{n-2} y'' + a_{n-1} y' + a_n y = b(x)$$

donde a_1, a_2,…, a_n son funciones continuas en un intervalo I

Definición previa:

DEPENDENCIA LINEAL

Teorema importante

- ✓ **ED a coeficientes constantes**
- ✓ **ED con coeficientes variables**
- ✓ **Ecuación homogénea asociada**

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES de segundo orden a coeficientes constantes

- Ecuación diferencial lineal HOMOGÉNEA de segundo orden a coeficientes constantes:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = 0$$

Se propone como solución una función de la forma: $y = e^{rx}$

De acuerdo a la naturaleza de los valores de "r", la solución general de la EDO es:

$$y_G = C_1\, e^{r_1 x} + C_2\, e^{r_2 x}$$

$$y_G = (C_1 + C_2\, x)\, e^{r\, x}$$

$$y_G = e^{\alpha\, x}\,(C_1 \cos \beta x + C_2\, sen\, \beta x)$$

En MAPLE

ECUACIONES DIFERENCIALES LINEALES de segundo orden a coeficientes constantes

- Ecuación diferencial lineal NO HOMOGÉNEA de segundo orden a coeficientes constantes:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = b(x)$$

La solución es una función de la forma: $y_{GNH} = y_{PNH} + y_{GH}$

✓**Método de los coeficientes indeterminados**

✓**Método de variación de parámetros**

Método de los coeficientes indeterminados

Este método consiste en proponer como solución de la ecuación diferencial no homogénea una función de la misma estructura que el segundo miembro con ciertos coeficientes a determinar.

$b(x)$ puede ser la suma o producto de:

- polinomios
- exponenciales
- función seno y/o coseno
- tipo combinado

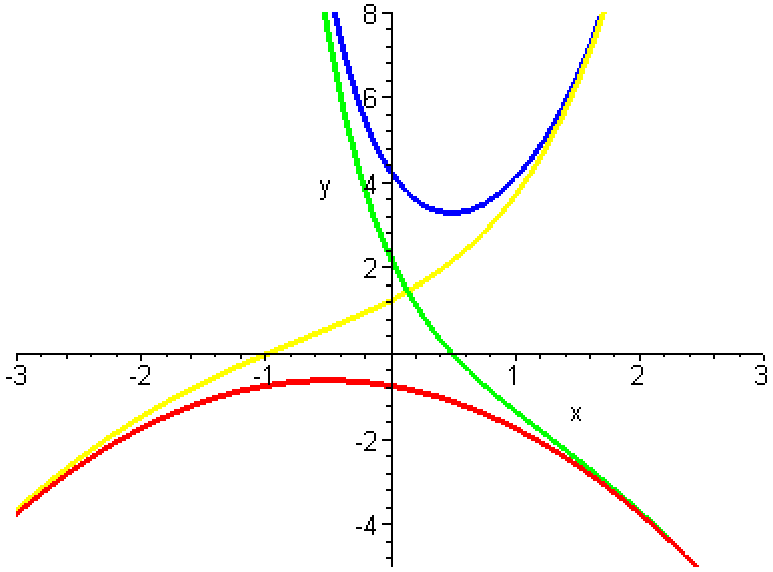
En MAPLE

Método de los coeficientes indeterminados

$b(x)$ es un polinomio $\quad y'' + y' - 2y = x^2$

La figura muestra cuatro soluciones de la ecuación diferencial en términos de la solución particular

y_{PNH}



y de las funciones $f(x) = e^x$

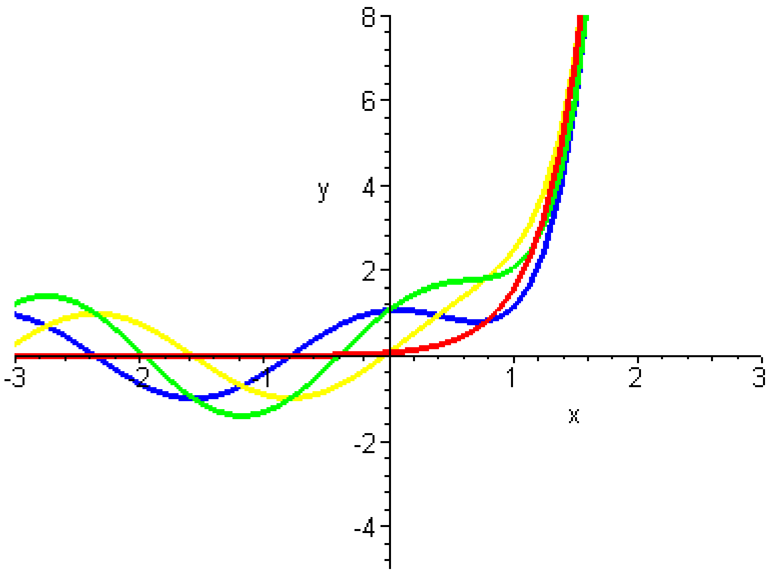
$g(x) = e^{-2x}$

Método de los coeficientes indeterminados

$b(x)$ es de la forma Ce^{kx} $\quad y'' + 4y = e^{3x}$

La figura muestra cuatro soluciones de la ecuación diferencial en términos de la solución particular

$$y_{PNH}$$



y de las funciones $f(x) = \cos 2x$

$$g(x) = sen\,2x$$

Método de los coeficientes indeterminados

$b(x)$ es de la forma C cos(wx) ó C sen(wx)

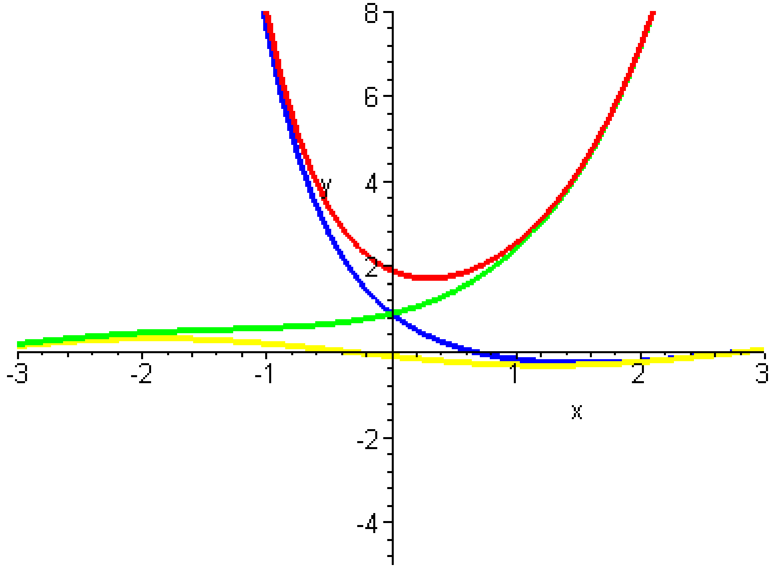
$$y'' + y' - 2y = sen(x)$$

La figura muestra cuatro soluciones de la ecuación diferencial en términos de la solución particular

$$y_{PNH}$$

y de las funciones $f(x) = e^{x}$

$$g(x) = e^{-2x}$$



Método de los coeficientes indeterminados

$b(x)$ es una suma de funciones de esos tipos

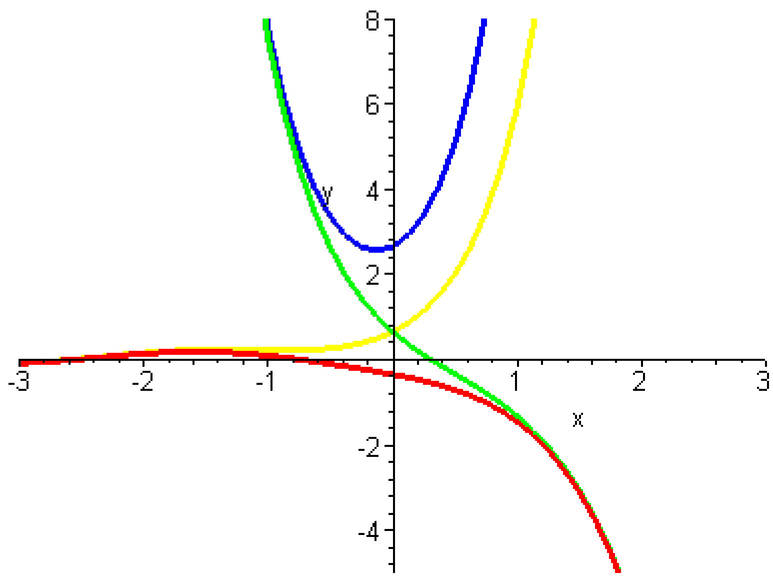
La figura muestra cuatro soluciones de la ecuación diferencial en términos de la solución particular

$$y_{PNH}$$

y de las funciones $f(x)=e^{2x}$

$g(x)=e^{-2x}$

$$y''-4y=xe^{x}+\cos(2x)$$



Método de variación de parámetros: WRONSKIANO

Este método consiste en suponer que la solución general de:

$$y'' + a_1 y' + a_2 y = f(x)$$

es de la forma:

$$y = v_1(x).u_1(x) + v_2(x).u_2(x)$$

donde u_1 y u_2 son dos soluciones particulares de la ecuación diferencial homogénea asociada y v_1 y v_2 son dos funciones a determinar.

Método de variación de parámetros: WRONSKIANO

Sea la ecuación diferencial $y'' + y = tg(x)$

```
> ecuac8:=diff(y(x),x$2)+y(x)=tan(x);
```

$$ecuac8 := \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} y(x)\right) + y(x) = \tan(x)$$

```
> solucion_general_homogenea:=dsolve(diff(y(x),x$2)+y(x)=0,y(x));
```

$$solucion\_general\_homogenea := y(x) = \_C1\ \sin(x) + \_C2\ \cos(x)$$

```
> solucion_general_homogenea:=dsolve(diff(y(x),x$2)+y(x)=0,y(x),output=basis);
```

$$solucion\_general\_homogenea := [\sin(x), \cos(x)]$$

```
> DEtools[varparam](solucion_general_homogenea,tan(x),x);
```

$$\_C_1 \sin(x) + \_C_2 \cos(x) - \cos(x) \ln(\sec(x) + \tan(x))$$

En MAPLE

Ver ejemplo 9!!!

MODELIZACIÓN DE SITUACIONES

Las ecuaciones diferenciales lineales de segundo orden tienen una variedad de aplicaciones en la ciencia.

- Vibración de los resortes $$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k\,x$$
- Vibraciones amortiguadas $$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k\,x - c\frac{dx}{dt}$$
- Vibraciones forzadas $$m\frac{d^2x}{dt^2} = -k\,x - c\frac{dx}{dt} + F(t)$$

MATHEMATICA